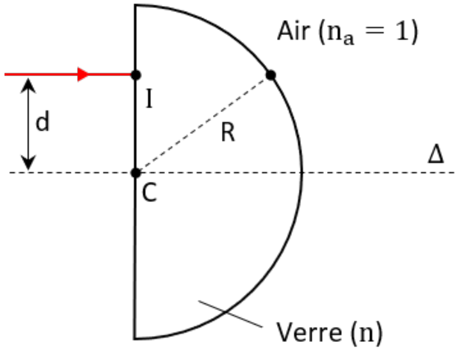
Optique géométrique | Chapitre 1 | TD (O1)

Exercice n°1 • Réfraction par un hémi-cylindre *cours*

Un rayon lumineux atteint un hémi-cylindre (centre C, rayon R) avec une incidence normale (au point I, parallèle et à une distance d de l'axe Δ).



1) Poursuivre, en justifiant, la marche du rayon lumineux à l'intérieur du cylindre.

On appelle J le point d'incidence du rayon sur la face de sortie. On note i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction dans l'air (on suppose qu'il existe).

2) Poursuivre qualitativement la marche du rayon lumineux à l'extérieur du cylindre. Indiquer sur le schéma le point J et les angles i et r.

On note A le point d'intersection entre le rayon émergent et l'axe Δ.

3) Écrire la loi de Snell-Descartes au point J.

4) Calculer la distance $d = CI$ pour que le rayon émerge tangent à l'hémi-cylindre, en fonction de R et n.

5) En déduire, dans cette configuration, la distance CA en fonction de R et n.

6) Quel phénomène apparaît si on choisit une distance $d' > d$?

Exercice n°2 • Couleur d'un laser ★☆☆

On considère une diode laser de longueur d'onde 520 nm dans le vide.

1) On éclaire une feuille de papier. De quelle couleur est la tâche observée ?

Le faisceau est envoyé dans un morceau de plexiglas d'indice optique $n = 1,51$.

2) Calculer la longueur d'onde dans le plexiglas.

3) De quelle couleur est le laser dans le plexiglas ?

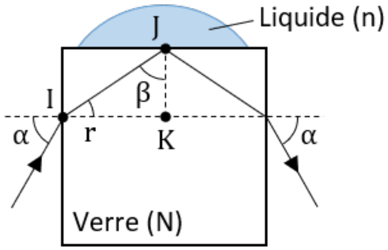
Exercice n°3 • Réfractomètre de Pulfrich ★⯪☆

Le schéma ci-dessous présente le principe du réfractomètre de Pulfrich. L'objectif est de mesurer l'indice n d'un liquide placé au-dessus d'une pièce de verre d'indice N, en utilisant le principe de la réflexion totale.

1) Quelle plage d'indice optique n ce réfractomètre peut-il mesurer ?

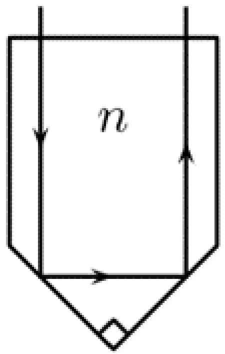
On note α le plus petit angle d'incidence permettant d'obtenir une réflexion totale.

2) Déterminer l'expression de n en fonction de α et N.



Exercice n°4 • Prisme à réflexion totale ★★☆

On considère le prisme de la figure ci-dessous, d'indice n, dont la pointe forme un angle de 90 ° (chaque face est orientée à 45 ° de l'horizontale). Le prisme est plongé dans l'air d'indice 1 . On constate qu'un rayon lumineux arrivant sous incidence normale ressort du prisme parallèlement à lui-même après avoir subi deux réflexions totales sur les faces de la pointe.



1) En déduire que l'indice du prisme doit être supérieur à une valeur n_{min}.

La pointe du prisme est maintenant plongée dans de l'eau, d'indice $n_e = 1,33$.

2) La direction du rayon émergent par la face supérieure est-elle modifiée ?

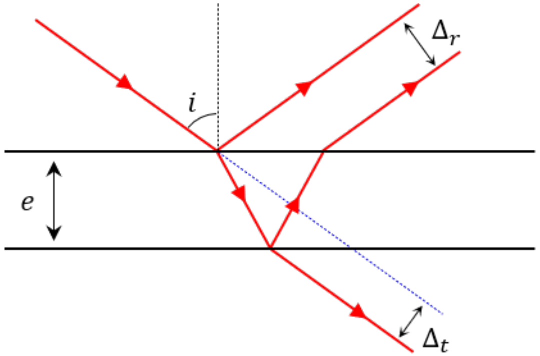
3) On constate qu'il n'y a maintenant plus réflexion totale : on observe des rayons émergents dans l'eau. En déduire que l'indice du prisme est inférieur à une autre valeur n_{max}.

4) Déterminer la direction des rayons émergents dans l'eau pour $n = 1,52$ et préciser la déviation du rayon quand il parvient dans l'eau. Réaliser un schéma des différentes réflexions et réfractions.

5) Quelle caractéristique du rayon émergent par la face supérieure est-elle modifiée quand le prisme est plongé dans l'eau ? Proposer une utilisation de ce dispositif comme détecteur de niveau d'eau.

Exercice n°5 • Lame à face parallèles ★★☆

Un rayon lumineux tombe avec un angle i sur une lame de verre d'indice $n = 1,5$, d'épaisseur $e = 1,0$ mm à faces parallèles placée dans l'air d'indice 1.



1) Montrer que le rayon transmis est parallèle au rayon incident.

2) Montrer que les deux rayons réfléchis sont parallèles entre eux.

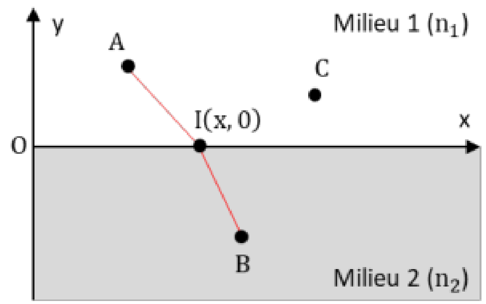
3) Déterminer l'expression de l'espacement Δ_r en fonction de e, n et i.

4) Même question pour Δ_t.

Données : $\sin(b - c) = \sin(b)\cos(c) - \cos(b)\sin(c)$

Exercice n°6 • Principe de Fermat ★★☆

En 1657, Pierre de Fermat propose un nouveau modèle sur la propagation de la lumière. Il postule que : « parmi tous les trajets imaginables, le trajet réellement suivit par la lumière est celui qui minimise le temps de trajet ». Le but de cet exercice est de vérifier la compatibilité du principe de Fermat avec les lois de Snell-Descartes.
Soit 3 points fixes $A\,(x_A, y_A)$, $B\,(x_B, y_B)$ et $C\,(x_C, y_C)$, et un point mobile $I\,(x, 0)$. On cherche à placer correctement le point I pour satisfaire le principe de Fermat, pour la réfraction (B) et pour la réflexion (C). On vérifiera ensuite qu'il s'agit du même point prédit par les lois de Snell-Descartes.



1) Exprimer le temps $t(x)$ mis par la lumière pour effectuer le trajet AIB en fonction des indices optiques et des coordonnées des points A, B et I.

2) Montrer qu'en minimisant ce temps de trajet, on retrouve les lois de Snell-Descartes de la réfraction.

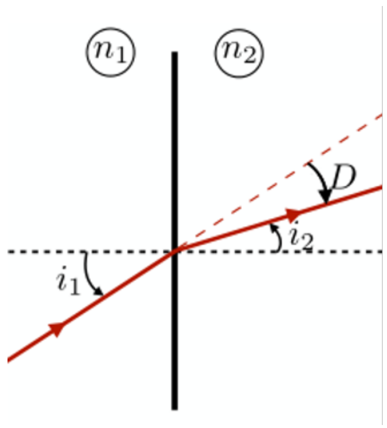
3) Suivre le même raisonnement avec le trajet AIC pour retrouver les lois de Snell-Descartes de la réflexion. *Indice : il est possible de faire cette question sans faire de nouveaux calculs, mais en utilisant astucieusement le calcul précédent.*

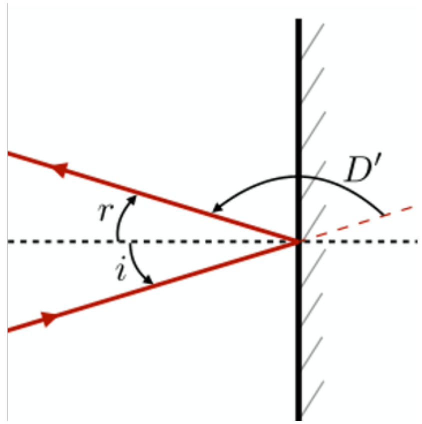
Exercice n°7 • Étude d'un arc en ciel ★★★

Dans cet exercice, tous angles sont des **angles orientés** (positivement dans le sens trigonométrique).

Données :

$$\frac{d\,\arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$





Généralités sur la réfraction (figure de gauche)

On considère premièrement un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2. Soient i_1 et i_2 les angles que font les rayons incident et réfracté avec la normale au dioptre.

1) Rappelez la relation entre i_1, i_2, n_1 et n_2.

2) On suppose que le milieu 1 est moins réfringent que le milieu 2. Quel est l'angle maximal $i_{2,max}$ observable pour le rayon réfracté ?

3) On suppose maintenant que le milieu 1 est plus réfringent que le milieu 2. Le rayon émergent est-il toujours défini ? Si non, préciser l'angle $i_{1,lim}$ au-delà duquel il n'y aura plus de réfraction.

4) Exprimer la déviation D subie par le rayon au passage du dioptre en fonction de i_1 et i_2 uniquement.

Généralités sur la réflexion (figure de droite)

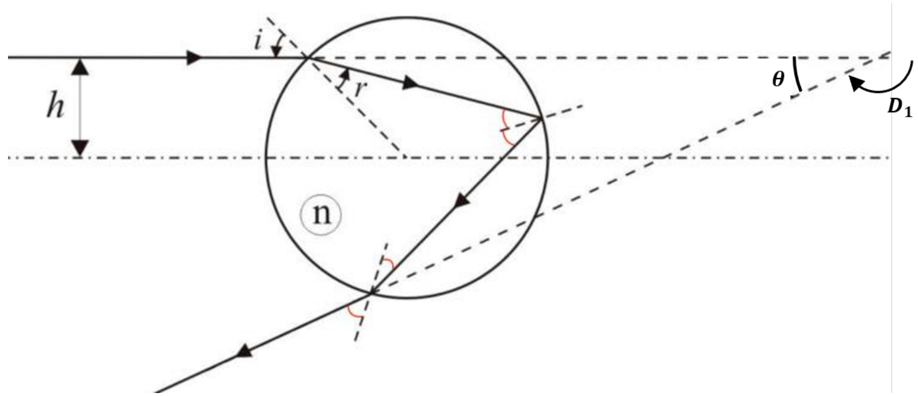
On considère maintenant un miroir plan.

L'angle i représente l'angle que fait le rayon incident avec la normale au miroir et r représente l'angle que fait le rayon réfléchi avec la normale.

5) Quelle relation relie les angles orientés i et r ?

6) Exprimer la déviation D' subie par le rayon incident après réflexion sur le miroir en fonction de i uniquement.

Étude d'un rayon lumineux dans une goutte d'eau



On considère une goutte d'eau sphérique, de rayon R et d'indice de réfraction n. Les trajets des rayons lumineux sont définis ci-dessous. Soit un rayon lumineux incident, situé à une hauteur h de l'axe de la goutte associée à l'angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit). Ce rayon est parallèle à l'axe optique comme indiqué sur la figure.

On note D_1 l'angle de déviation de ce rayon, à la sortie de la goutte d'eau, obtenu après une réfraction à l'entrée de la goutte, une réflexion sur le fond de la goutte et une réfraction à la sortie de la goutte. De plus, on note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i.

7) Sur le schéma, orienter les angles représentés en rouge et indiquer leurs expressions en fonction de r et i.

8) Montrer, en utilisant les résultats précédents, que $D_1 = 4r - 2i + \pi$ (modulo 2π).

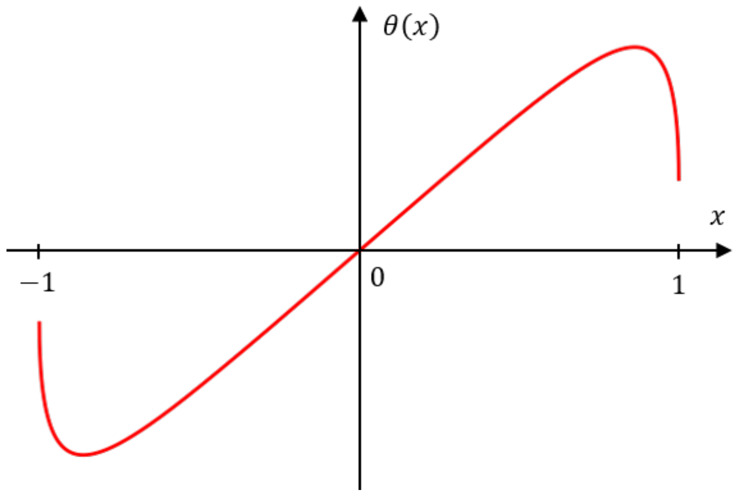
9) On introduit la grandeur $x = h/R$ avec $0 < x < 1$. En déduire que :

$$D_1(x) = 4\,\text{arcsin}(x/n) - 2\,\text{arcsin}(x) + \pi$$

Dans la suite, on travaillera avec l'angle complémentaire (cf. schéma) :

$$\theta(x) = 4\,\text{arcsin}(x/n) - 2\,\text{arcsin}(x)$$

On donne l'allure de $\theta(x)$ ci-dessous.



10) Montrer que le maximum de la fonction est obtenu pour :

$$x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

11) Calculer x_m et $\theta(x_m)$ (noté θ_m) en degrés dans le cas de l'eau sachant que $n = 1,337$.

Étude d'un arc en ciel

Il s'agit maintenant de déduire les caractéristiques de l'arc-en-ciel, formé par la rétrodiffusion de la lumière solaire dans des gouttes d'eau sphériques des mécanismes présentés ci-dessus.
L'indice de réfraction de l'eau dépend de la longueur d'onde dans le vide du rayon lumineux. On donne $n_{400} = 1,343$ et $n_{700} = 1,331$, respectivement pour les longueurs d'onde $\lambda = 400$ nm et 700 nm

12) Comment qualifie-t-on à un tel milieu ?

13) Déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta$ entre le violet (400 nm) et le rouge (700 nm).

Le soleil est une source lumineuse située à l'infini. Lorsqu'il pleut, un continuum de gouttes d'eau se trouve entre les nuages et le sol.

14) Conclure. Sur un schéma, préciser les positions relatives du soleil, de la pluie et de l'observateur. Pourquoi voit-on une région blanche au centre de l'arc (cf. photo) ? Pourquoi voit-on un arc lumineux multicolore ? Pourquoi voit-on une région sombre en dehors de l'arc ?

Éléments de correction

❶ Cf. cours. ❷ 1) Vert. 2) $\lambda_{\text{plexiglas}} = 344$ nm. 3) Vert. ❸ 1) $n < N$. 2) $n = \sqrt{N^2 - \sin^2(\alpha)}$. ❹ 1) $n > 1,41 = n_{min}$. 2) Non. 3) $n < 1,89 = n_{max}$. 4) $D = r - i = 8,9\,° > 0$. 5) L'intensité lumineuse. ❺ 1) & 2) Faire un schéma avec les angles. 3) $\Delta_r = \frac{2e\,\sin(i)\cos(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}}$. 4) $\Delta_t = e\,\sin(i)\left(1-\frac{\cos(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}}\right)$. ❻ 1) $t = \dfrac{n_1}{c}\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2} + \dfrac{n_2}{c}\sqrt{(x_B-x)^2 + y_B^2}$. 2) $\dfrac{dt}{dx} = 0 = n_1\sin(i_1) - n_2\sin(i_2)$. 3) Poser $n_1 = n_2$. ❼ 1) $n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2)$. 2) $i_{2,max} = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)$. 3) $i_{1,lim} = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$. 4) $D = i_2 - i_1$. 5) $i = -r$. 6) $D' = \pi - 2i$. 8) $D_1 = 4r - 2i + \pi$. 9) $i = \arcsin(x)$ et $r = \arcsin(x/n)$. 10) $\dfrac{d\theta}{dx} = 0$. 11) $x_m = 0,86$ et $\theta_m = 41,5\,°$. 12) Dispersif. 13) $\Delta\theta = 1,8\,°$. 14) Cf. correction.